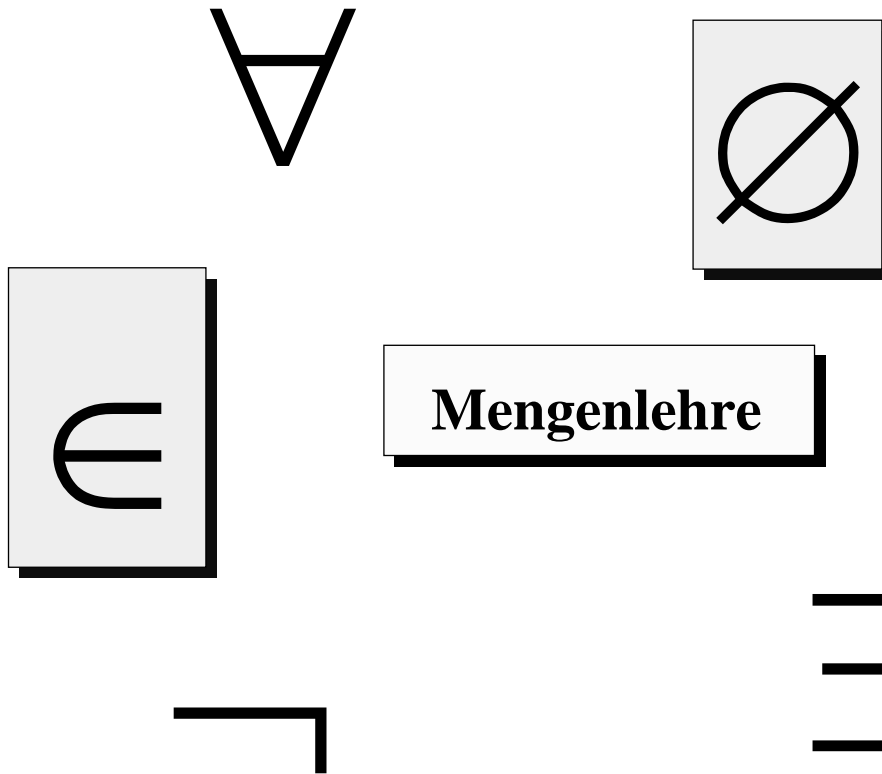
Repetitorium:**Grundlagen von Mengenlehre und Logik**

**Warum** um alles in der Welt muss man sich mit Logik und Mengenlehre herumschlagen, ...

**... wenn man doch nur vernünftig mit Datenbanken umgehen können will ?**

- **Datenbankanfragesprachen wie SQL stellen einen "Mix" aus logischen und mengentheoretischen Konzepten dar.**
- **Will man wirklich verstehen, was man da tut, wenn man eine Anfrage formuliert, dann muss man diese Grundlagen beherrschen.**
- **Die Basis aller Auswerteverfahren für relationale Anfragen bildet die Relationenalgebra, eine spezielle Form von Mengenalgebra mit aussagenlogischen Aspekten.**

**daher:** Selbststudium der folgenden Folien ist wirklich unerlässlich !



- **Der (mathematische) Begriff der Menge ist auch für nahezu alle Gebiete der Informatik von fundamentaler Bedeutung.**
- **Ziel dieses Abschnitts: Zusammenfassen der wichtigsten Grundkonzepte der Mengenlehre (die eigentlich als Schulwissen vorausgesetzt werden)**
- **"Definition" des Begriffs erfolgt (wie auch in der Mathematik) informell (intuitiv, "naive Mengenlehre"):**

**"Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen."**

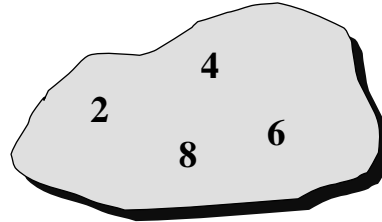
**Georg Cantor (1845-1918), Begründer der Mengenlehre**

- zwei Formen der Darstellung von Mengen:

**explizit:** Aufzählung aller Elemente der Menge  
 $\{ e_1, e_2, \dots \}$   
**implizit:** mittels eines definierenden Ausdrucks  $A$   
 $\{ x \mid A(x) \}$

z.B.:  $\{ 2, 4, 6, 8 \}$   
 $\{ x \mid x \text{ ist gerade natürliche Zahl und } x < 10 \}$

Repräsentationen  
derselben Menge



- Eine Menge, die kein Element enthält, heisst leere Menge und wird durch die Notation  $\{ \}$  (oder auch  $\emptyset$ ) dargestellt.

- Bei expliziten Mengenrepräsentation spielt die Reihenfolge der Darstellung keine Rolle ("Mengelemente haben an sich keine Reihenfolge.").

zwei Darstellungen  
derselben Menge

$\left\{ \begin{array}{l} \{ 2, 4, 6, 8 \} \\ \{ 6, 4, 8, 2 \} \end{array} \right.$

- Auch die Anzahl des Auftretens eines Elements in einer Mengenrepräsentation ist irrelevant ("Mengen enthalten jedes ihrer Elemente nur einmal.").

noch eine Darstellung  
dieser Menge

$\{ 2, 2, 4, 8, 8, 8, 6 \}$

- Nach Cantors "Definition" besteht eine Menge aus "Objekten". Jedes Objekt in einer Menge wird Element dieser Menge genannt.

- symbolisch:

$$e \in B$$

Objekt e ist Element der Menge B

- Die Anzahl der Elemente einer Menge M wird Mächtigkeit oder Kardinalität von M genannt, symbolisch:

$$|M|$$

- Die leere Menge hat die Kardinalität 0.

- **Vorsicht !** Mehrfach dargestellte Elemente einer Menge werden nur je einmal gezählt, d.h.

$$|\{1, 2, 1, 4, 2, 7\}| = 4$$

- A heisst Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

$$A \subseteq B$$

- Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn A Teilmenge von B und B Teilmenge von A ist.

$$A = B$$

- A heisst echte Teilmenge von B, wenn A Teilmenge von B ist, aber wenn A nicht gleich B ist.

$$A \subset B$$

**Durchstreichen eines Mengenvergleichsoperators bzw. des Elementoperators bedeutet Negieren der jeweiligen Beziehung:**

$$A \not\subseteq B$$

A ist nicht Teilmenge von B

$$A \neq B$$

A und B sind ungleich

$$A \not\subset B$$

A ist keine echte Teilmenge von B

$$e \notin B$$

e ist kein Element von B

- Alle Teilmengen einer gegebenen Menge M bilden selbst eine Menge:

$$P(M) \quad \text{Potenzmenge von } M$$

- Die Potenzmenge jeder Menge M enthält mindestens die leere Menge und M selbst:

$$\{\} \in P(M)$$

$$M \in P(M)$$

- Jede Teilmenge von M ist Element der Potenzmenge von M:

$$A \in P(M) \quad \text{genau dann, wenn } A \subseteq M$$

- Beispiel zur Potenzmengenbildung:

$$M = \{1, 2\}$$

$$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

M  
↓

- Die Mengenlehre kennt drei grundlegende Operationen, mit denen man zwei Mengen verknüpfen kann:

Vereinigung  $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{ e \mid e \in A \text{ oder } e \in B \}$

Durchschnitt  $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{ e \mid e \in A \text{ und } e \in B \}$

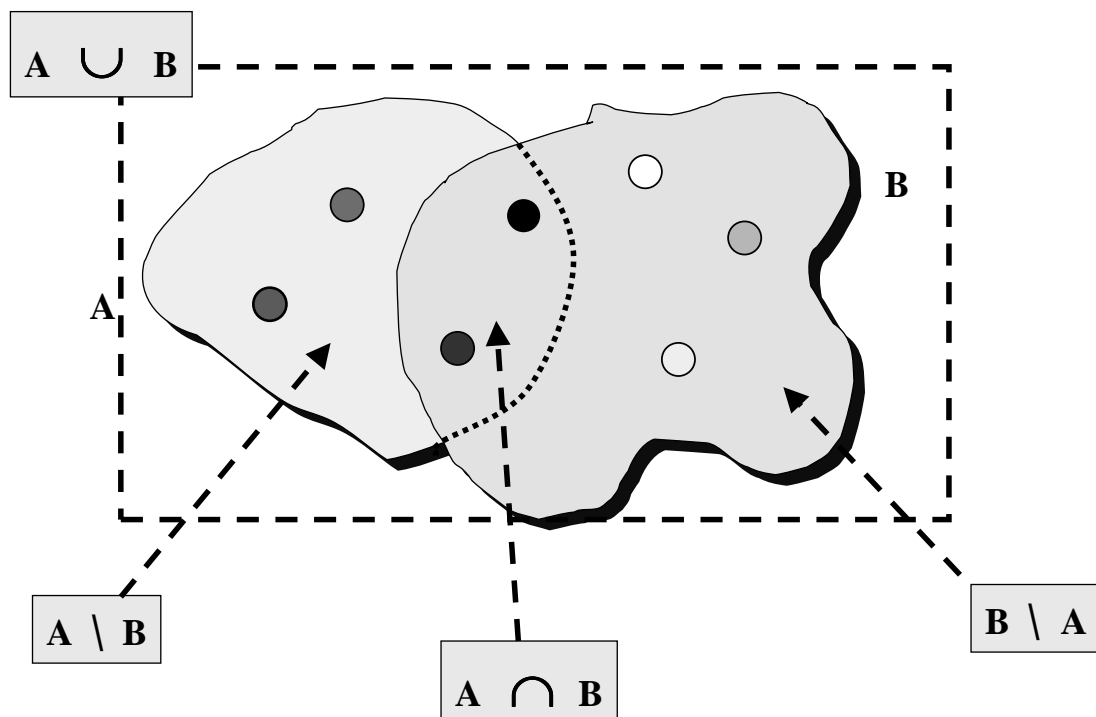
Differenz  $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{ e \mid e \in A \text{ und } e \notin B \}$

- Beispiele dazu:

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$$

$$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$$



- Zwei Mengen heißen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist:

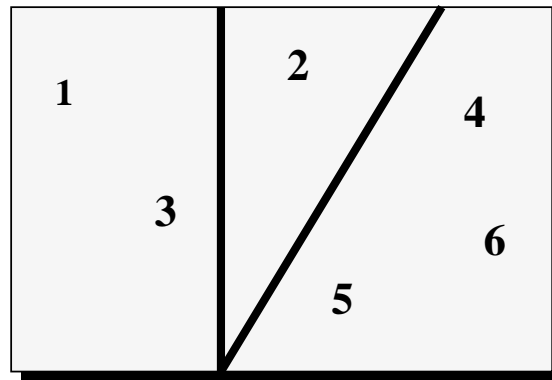
$$\text{A und B disjunkt genau dann, wenn } A \cap B = \emptyset$$

- Eine Zerlegung einer Menge in paarweise disjunkte Teilmengen heißt Partition der Menge:

$$\{ \{1,3\}, \{2\}, \{4,5,6\} \}$$

ist Partition von

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$



- weitere zweistellige Grundoperation der Mengenlehre:

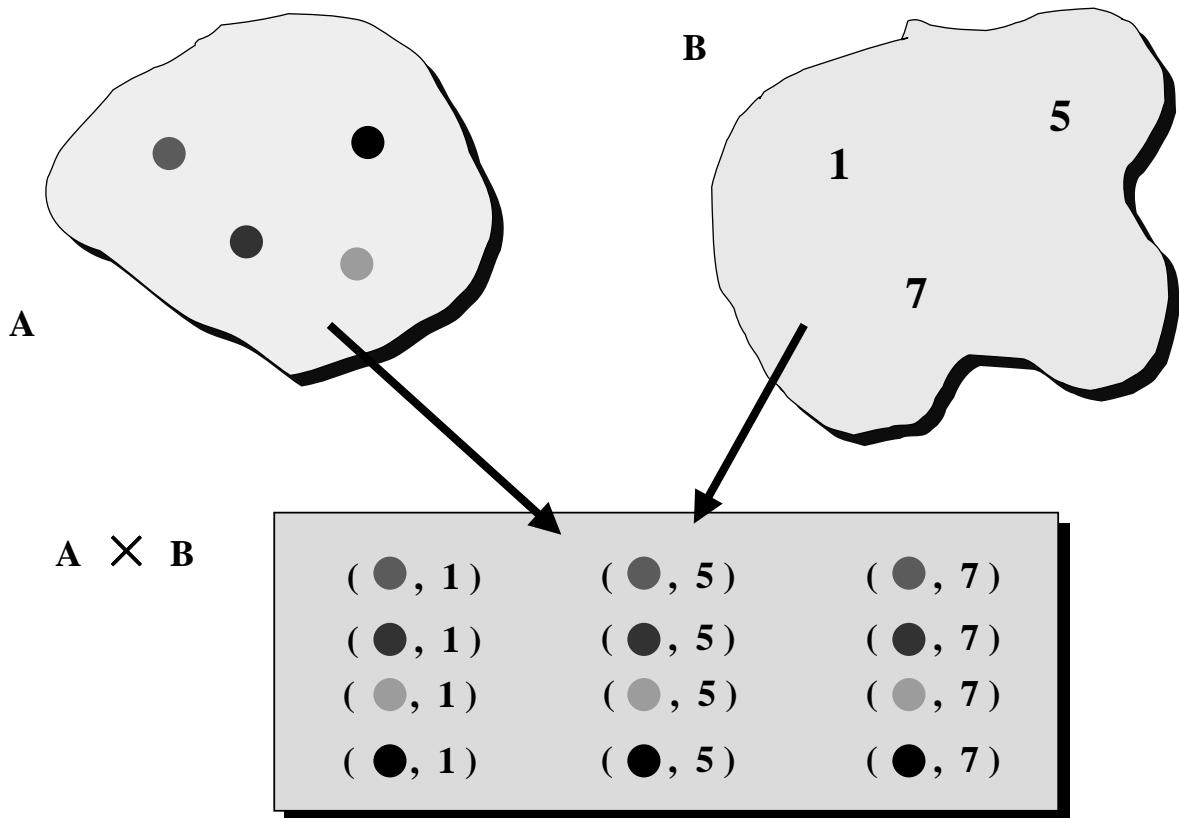
$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$$

(kartesisches) Produkt

- verallgemeinerte Produktbildung für  $n$  Mengen ( $n \geq 2$ ):

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$$

- Elemente des Produkts von  $n$  Mengen heißen  $(n)$ -Tupel.
- spezielle Bezeichnungen für Tupel:
  - $n = 2$ : Paare
  - $n = 3$ : Tripel
  - $n = 4$ : Quadrupel



- **Tupelmengen spielen in der Informatik eine besonders wichtige Rolle bei der Modellierung von Beziehungen zwischen Objekten.**
- **Tupelmengen werden auch als Relationen bezeichnet.**

**Jede Teilmenge R eines Produkts  $A_1 \times \dots \times A_n$  heisst Relation über  $A_1, \dots, A_n$**

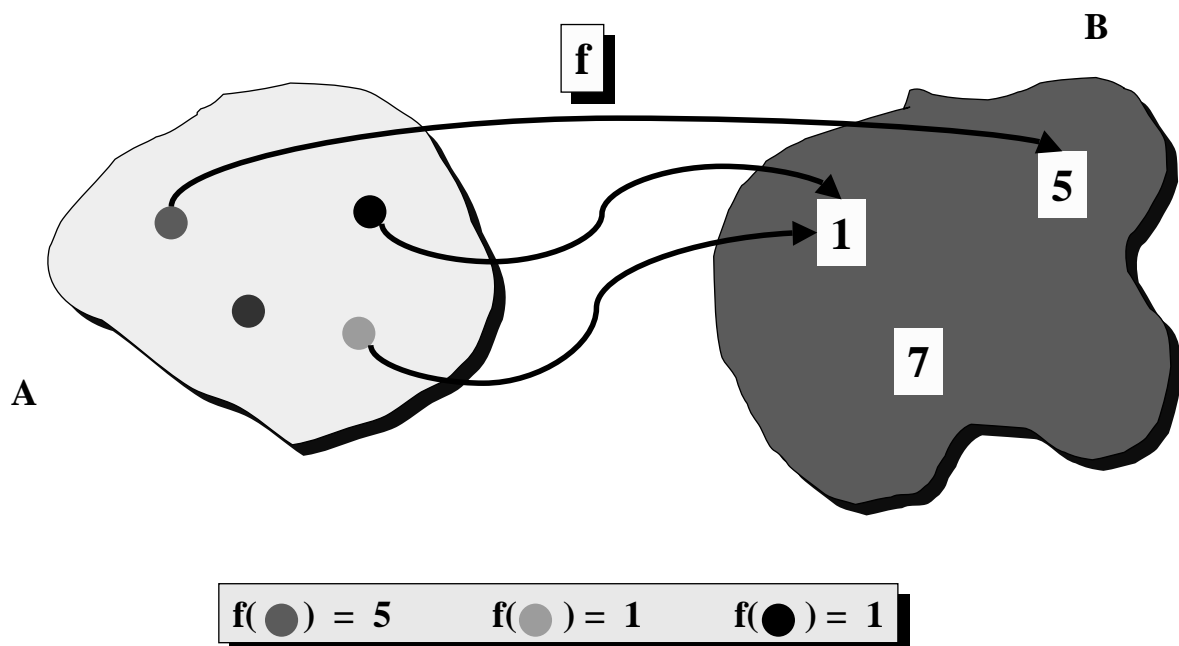
- **Relationen werden meist in Tabellenform dargestellt.**

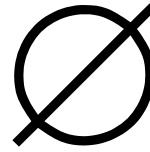
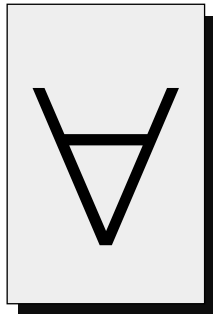
$A_1 = \{ a, b, c \}$   
 $A_2 = \{ 1, 2 \}$   
 $A_3 = \{ \%, \$ \}$

**R**

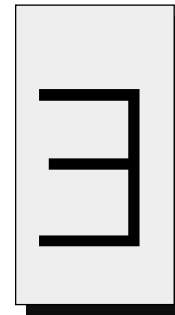
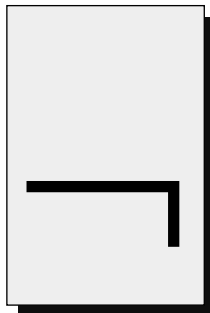
a	1	%
a	1	\$
b	2	\$

- Eine binäre Relation  $R \subseteq A \times B$  heisst
  - rechtseindeutig, wenn es für jedes  $a \in A$  höchstens ein  $b \in B$  gibt mit  $(a, b) \in R$
  - linkseindeutig, wenn es für jedes  $b \in B$  höchstens ein  $a \in A$  gibt mit  $(a, b) \in R$
- Rechtseindeutige Relationen werden auch Funktionen (bzw. Abbildungen) genannt. Sie dienen als mathematische Modelle eindeutiger Zuordnungen.
- Eine rechtseindeutige Relation  $f$  über  $A \times B$  wird dann als Funktion von  $A$  nach  $B$  bezeichnet.
- Notation:  $f : A \rightarrow B$  statt  $f \subseteq A \times B$  und  $f(a) = b$  statt  $(a, b) \in f$
- $A$  heisst Definitionsbereich von  $f$ ,  $B$  wird Bildbereich von  $f$  genannt.
- Statt als Tabelle werden Funktionen meist als Pfeildiagramme notiert.





**Logik**



## Lehre von den Aussagen und ihren Verknüpfungen: Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde,  
von dem es sinnvoll ist zu sagen,  
es sei wahr oder falsch.

(Aristoteles, griech. Mathematiker, 384-322 v. Chr.)

### Beispiele für elementare Aussagen:

- |                          |        |
|--------------------------|--------|
| • $5 < 6$                | wahr   |
| • 8 ist Primzahl         | falsch |
| • Der Mond ist aus Käse. | falsch |



- Junktoren sind also syntaktische "Werkzeuge", mit denen sich die Bedeutung ("Semantik") von zusammengesetzten Aussagen aus der Bedeutung der Teilaussagen herleiten lässt.
- Wie dies zu geschehen hat, wird i.a. durch sogenannte Wahrheits- tafeln festgelegt:

**z.B.: Wahrheitstafel für Konjunktion**

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

W: wahr  
F: falsch

- wie folgt zu lesen: Wenn A wahr ist und B falsch, dann hat die Aussage  $A \wedge B$  den Wahrheitswert falsch.

- Wahrheitstafeln der anderen zweistelligen Junktoren:

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

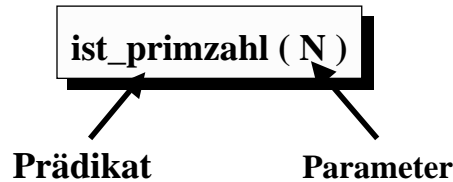
**gewöhnungsbedürftig !**

- Wahrheitstafel der Negation:

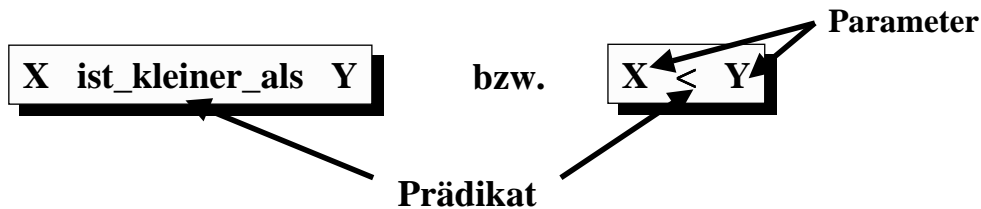
A	$\neg A$
W	F
F	W



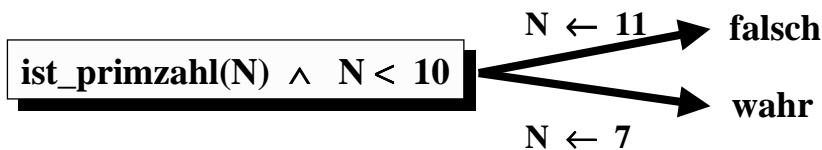
- In der Prädikatenlogik heissen (parametrisierte) Aussagen **Formeln**.
- Es gibt atomare Formeln, die sich nicht weiter in Teilformeln zerlegen lassen, und zusammengesetzte Formeln, die aus Teilformeln aufgebaut sind.
- Formale Notation für atomare Formeln:



- Zweistellige Prädikate dürfen auch in Infixnotation verwendet werden:



- Formeln lassen sich mit Hilfe der Junktoren der Aussagenlogik zu neuen Formeln kombinieren:



- Zusätzlich bietet die Prädikatenlogik sogenannte **Quantoren** zum Bilden von Aussagen, die für manche bzw. für alle Individuen gelten sollen:

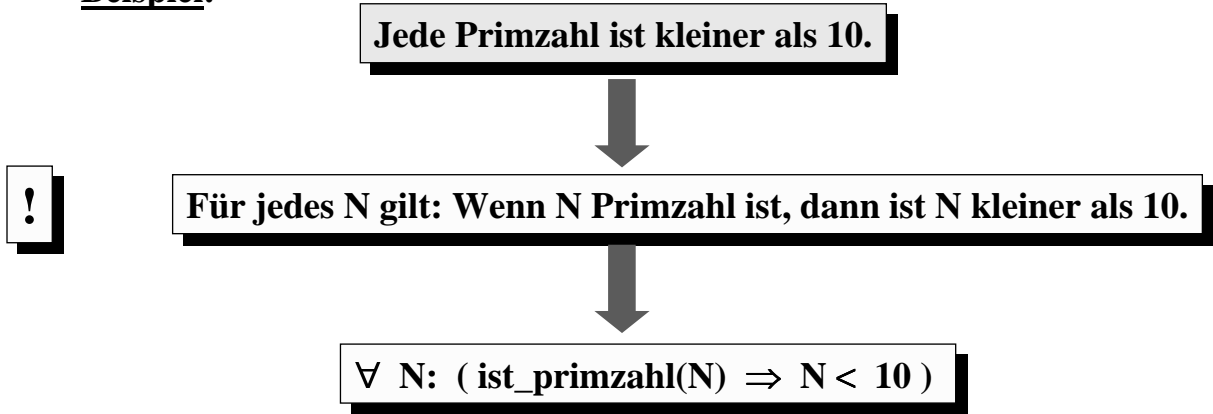
Existenzquantor  $\rightarrow \exists N: ( \text{ist\_primzahl}(N) \wedge N < 10 )$  wahr  
 Es gibt Primzahlen, die kleiner als 10 sind.

Allquantor  $\rightarrow \forall N: ( \text{ist\_primzahl}(N) \Rightarrow N < 10 )$  falsch  
 Alle Primzahlen sind kleiner als 10.

- Schwierigkeiten beim Formulieren von Sachverhalten mit Quantoren und Variablen:

Variablen müssen zuerst eingeführt und quantifiziert werden, bevor die eigentliche Aussage folgen kann.

- Beispiel:



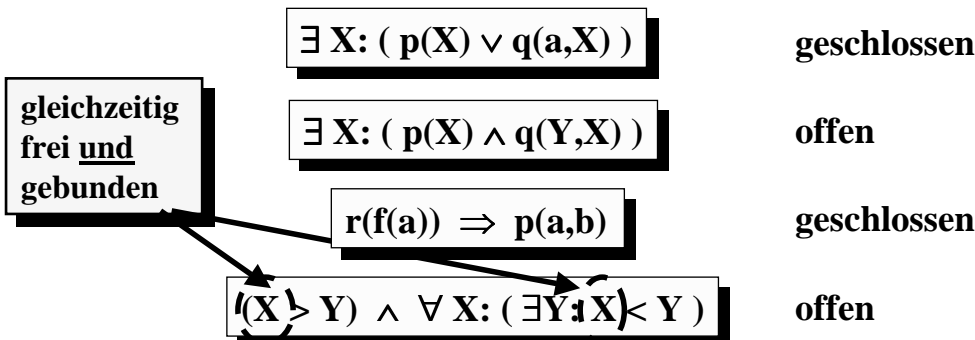
- Quantoren binden jeweils eine Variable innerhalb der quantifizierten Formel.

$\forall X: ( p(X) \wedge X > 2 )$       X ist (durch  $\forall$ ) gebunden

- Variablen, die nicht von einem Quantor gebunden werden, heissen frei.

$p(Y) \Rightarrow \exists X: q(X,Y,Z)$       Y und Z sind frei

- Formeln ohne freie Variablen heissen geschlossen, ansonsten offen.



- Prädikate können als Relationsnamen aufgefasst werden.
- Alle Kombinationen von Individuen, die eine Formel wahr machen, wenn man sie für die Parameter der Formel einsetzt, bilden eine Tupelmengung (= Relation).

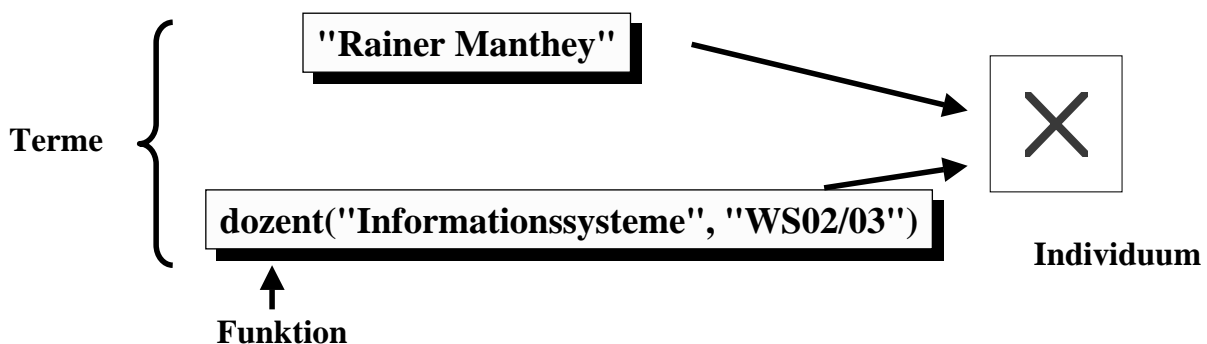
**ist\_echter\_teiler\_von(X, Y)**

X	Y
2	4
2	6
3	6
2	8
4	8
3	9
2	10
5	10
...	...

- weitere Erweiterung der Aussagenlogik: Einführen von Ausdrücken, die bestimmte Objekte des gerade betrachteten "Weltausschnitts" (des Individuenbereichs) bezeichnen:

**Terme**

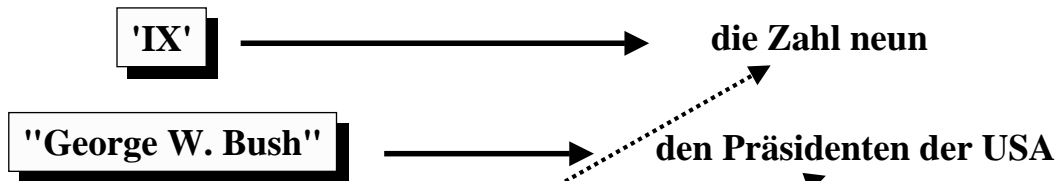
- Es gibt atomare und zusammengesetzte Terme.
- Atomare Terme bezeichnen ein bestimmtes Objekt direkt, zusammengesetzte Terme verwenden eine Funktion, die zunächst angewendet werden muss, um das bezeichnete Individuum zu identifizieren.



- Es gibt nur zwei Arten von atomaren ("unzerlegbaren") Termen:

Konstanten  
Variablen

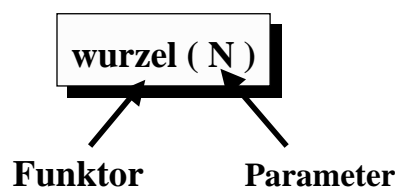
- Konstanten sind Zeichen oder Zeichenreihen, die immer genau ein Individuum ("Objekt") aus dem gerade betrachteten Individuenbereich bezeichnen, z.B.:



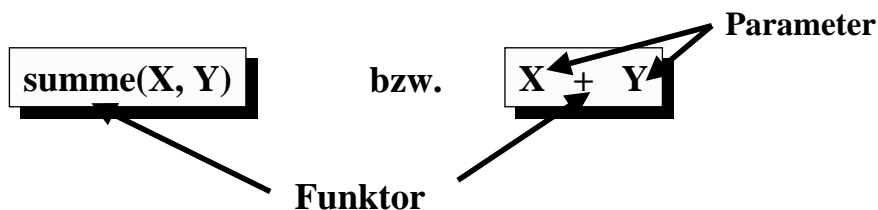
- Variablen bezeichnen ebenfalls zu jedem Zeitpunkt genau ein Individuum, aber diese Bedeutung kann sich ändern je nachdem, mit welcher Bedeutung die Variable gerade belegt worden ist:



- Formale Notation für zusammengesetzte Terme:



- Zweistellige Funktoren dürfen auch in Infixnotation verwendet werden:



- Die Bezeichnung 'Funktork' für den Namen einer Funktion wird auch Funktionssymbol oder Operator genannt.

- Es ist nicht leicht, atomare Formeln und zusammengesetzte Terme rein syntaktisch zu unterscheiden:

**<Funktork>(<Parameterliste>)**

Term

**<Prädikat>(<Parameterliste>)**

Formel

- Ob dieses syntaktische Gebilde ein Term oder eine Formel ist, hängt davon ab, ob das Symbol 'magic' ein Funktor ist (eine Funktion bezeichnet) oder ein Prädikat ist (eine Relation bezeichnet):

**magic(1, 2<sup>2</sup>, 3\*3)**

?

- 'ist\_professor("Rainer Manthey") ist eine atomare Formel, weil sie keine andere Formel enthält, sondern nur einen Term als Parameter.

'produkt(3, 42)' ist aber ein zusammengesetzter Term, weil er weitere Terme als Parameter enthält.

