Institut für Informatik III
Universität Bonn
HD Dr. R. Hinze

Römerstraße 164
D–53117 Bonn
6. November 2003

Übungen zur „Deskriptiven Programmierung“

Blatt 3

Viele listenverarbeitende Funktionen folgen dem gleichen Rekursionsschema. Dieses Schema kann durch eine Funktion höherer Ordnung eingefangen werden.

$$\begin{array}{lcl} \mathit{fold} & :: & \beta \to (\alpha \to \beta \to \beta) \to [\alpha] \to \beta \\ \mathit{fold}\ e\ f\ [\,] & = & e \\ \mathit{fold}\ e\ f\ (a : x) & = & f\ a\ (\mathit{fold}\ e\ f\ x) \end{array}$$

Die Funktion *fold* hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie die *einzige* Lösung der obigen Gleichungen (aufgefaßt als Gleichungen in der Unbekannten *fold*) ist.

$$\mathit{fold}\ e\ f \;=\; \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi\ [\,] & = & e \\ \varphi\ (a : x) & = & f\ a\ (\varphi\ x) \end{array} \right.$$

Dieses Gesetz heißt auch die „universelle Eigenschaft“ von *fold* (Englisch: universal property).

Aufgabe 5. Definiere die Funktionen

$$\begin{array}{lcl} \mathit{sum}\ [\,] & = & 0 \\ \mathit{sum}\ (a : x) & = & a + \mathit{sum}\ x \\ \mathit{length}\ [\,] & = & 0 \\ \mathit{length}\ (a : x) & = & 1 + \mathit{length}\ x \\ \mathit{reverse}\ [\,] & = & [\,] \\ \mathit{reverse}\ (a : x) & = & \mathit{reverse}\ x +\!\!+ [a] \end{array}$$

ohne explizite Rekursion mit Hilfe von *fold*.

Aufgabe 6. Zeige den folgenden Zusammenhang

$$\mathit{plus}\ n \cdot \mathit{sum} \;=\; \mathit{fold}\ n\ \mathit{plus}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaft von *fold*. Die Funktion *plus* ist durch $\mathit{plus}\ a\ b = a + b$ definiert.

Aufgabe 7. Das folgende Gesetz (Englisch: fusion) läßt sich oft zur Programmoptimierung einsetzen. Es zeigt, wie ein nachgeschalteter Funktionsaufruf in *fold* hineingezogen werden kann: h und $\mathit{fold}\ e\ f$ werden zu $\mathit{fold}\ e'\ f'$ fusioniert.

$$h \cdot \mathit{fold}\ e\ f \;=\; \mathit{fold}\ e'\ f' \quad\Longleftarrow\quad \left\{ \begin{array}{lcl} h\ e & = & e' \\ h\ (f\ a\ x) & = & f'\ a\ (h\ x) \end{array} \right.$$

Leite das Gesetz aus der universellen Eigenschaft von *fold* ab. Zeige den Zusammenhang aus Aufgabe 6 erneut, diesmal mit Hilfe von Fusion.